

Schubfachschlussprinzip

Die einfachste Version des Schubfachschlusses (pigeonhole principle) lässt sich wie folgt formulieren:

- *Verteilt man $n + 1$ Objekte auf n Schubfächer, so gibt es mindestens ein Schubfach in dem mehr als ein Objekt ist (bzw. so gibt es mindestens ein Schubfach in dem sich wenigstens zwei Objekte befinden).*

Bzw. etwas allgemeiner zwei weitere Varianten dieses Prinzips:

- *Verteilt man $a \cdot n + r$ ($0 < r < n$) Objekte auf n Schubfächer, so gibt es mindestens ein Schubfach in dem sich wenigstens (mindestens) $a + 1$ Objekte befinden).*
- *Falls man m Objekte auf n Schubfächer ($n, m > 0$) verteilt und $n > m$ ist, dann gibt es mindestens ein Schubfach, in der kein Objekt landet.*

Beispiele zum Vortrag:

- 1) Man geht davon aus, dass ein Mensch etwa 100.000 bis 200.000, jedoch sicher weniger als eine Million Haare besitzt.
 - a) In Oberösterreich leben ca. 1,5 Millionen Menschen. Zeige, dass es in Oberösterreich mindestens zwei Personen gibt, die gleich viele Haare besitzen.
 - b) Österreich hat zurzeit ca. 8,98 Millionen Einwohner.
Mindestens wie viele Personen müssen gleich viele Haare besitzen?
- 2) Zeige, dass es unter 25 Schülern einer Klasse mindestens drei gibt, die im selben Monat Geburtstag haben.
- 3) Alice schreibt unter die Zahlen $1, 2, 3, \dots, 2022, 2023$ dieselben Zahlen in irgendeiner Reihenfolge nochmals an die Tafel. Nun subtrahiert sie jeweils die untenstehenden Zahlen der darüberstehenden Zahlen und multipliziert die neun berechneten Differenzen miteinander.
Alice behauptet, dass dieses Produkt immer gerade ist. Hat sie recht?
- 4) Es seien $n, x \in \mathbb{N}$ und es gelte $7 \nmid x$.
Zeige: Unter den Zahlen $n, n + x, n + 2x, \dots, n + 6x$ ist stets eine durch 7 teilbar.
- 5) Zeige, dass unter fünf beliebig gewählten Punkten im Inneren eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge 2 stets zwei geben muss, deren Abstand < 1 ist.

Lösungen:

- 1) Sei $n = 10^6$, also die Anzahl der Schubfächer, wobei jedes Schubfach hier für eine gewisse Anzahl von Haaren steht.
 - a) Für Oberösterreich gilt also: $1,5 \cdot 10^6 = 1 \cdot 10^6 + 500000$ daher ist $a = 1$ und es gibt mindestens $a + 1 = 2$ Personen mit gleich vielen Haaren.
 - b) Für Österreich erhält man: $8,9 \cdot 10^6 = 8 \cdot 10^6 + 900000$, als $a = 8$ und daher mindestens 9 Personen mit gleich vielen Haaren.
- 2) Wähle alle möglichen (zwölf) Monate als Schubfächer. Dann ist für diese Einteilung $n = 12$ und daher $25 = 2 \cdot 12 + 1$, also $a = 2$. Es gibt daher also mindestens drei Personen, die im selben Monat Geburtstag haben.
- 3) Einige Beobachtungen zu Beginn:

- Von den Zahlen 1, 2, 3, ... , 2023 sind 1011 gerade und 1012 ungerade.

Anmerkung: Die Eigenschaft einer natürlichen Zahl entweder gerade oder ungerade zu sein nennt man in der Mathematik auch die **Parität**.

- Bzgl. der Parität der Differenzen gibt es vier Möglichkeiten:

$$g - g = g$$

$$g - u = u$$

$$u - g = u$$

$$u - u = g$$

Dieser letzte Fall liefert nun zusammen mit dem Schubfachprinzip das gewünschte Ergebnis, denn betrachtet man die 1012 ungeraden Zahlen als „Schubfächer“, dann kann man von diesen höchstens 1011 gerade Zahlen abziehen. Bei irgendeiner dieser ungeraden Schubfachzahlen muss man dann also eine ungerade Zahl abzählen und erhält damit immer eine gerade Zahl als Ergebnis.

- 4) Wir zeigen die Aussage durch einen indirekten Beweis. Dazu nehmen wir an, dass keine der Zahlen $n, n + x, n + 2x, \dots, n + 6x$ durch 7 teilbar ist und zeigen dann, dass dies nicht möglich ist.

Da keine der angegebenen sieben Zahlen durch 7 teilbar sein darf, können bei der Division durch 7 nur die Reste 1, 2, 3, ... , 6 auftreten. Mathematisch lässt sich dies kurz wie folgt anschreiben: Jede sieben Zahlen besitzt die Gestalt $7 \cdot N + r$ für ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $r \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Wir können die Zahlen also gemäß ihren auftretenden Resten klassifizieren bzw.

„schubladisieren“.

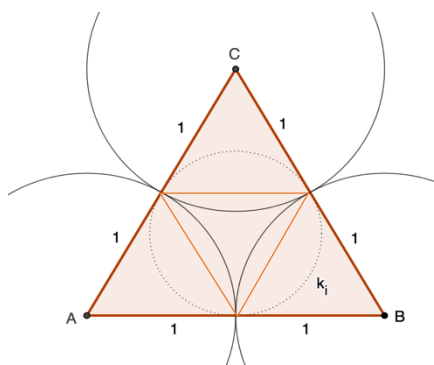
Wir haben somit als 6 Schubfächer (Jedes Schubfach enthält alle Zahlen mit gleichem Rest bei der Division durch 7) und 7 Zahlen. Es muss also mindestens zwei Zahlen z_1 und z_2 mit gleichem Rest geben, wobei $z_1 = 7 \cdot N_1 + r$ und $z_2 = 7 \cdot N_2 + r$ (für gewisse $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$) gelten muss. Außerdem gilt natürlich $z_1 = n + s \cdot x$ und $z_2 = n + t \cdot x$ für gewisse $s, t \in \{1, 2, \dots, 6\}$ auf Grund der Bauart der gegebenen Zahlen.

Aus diesen beiden Eigenschaften ergibt sich nun aber ein Widerspruch, denn betrachtet man die Differenz von z_1 und z_2 gilt:

$$z_1 - z_2 = 7 \cdot (N_1 - N_2) = (s - t) \cdot x$$

Die Differenz $z_1 - z_2$ ist also durch 7 teilbar und da $|s - t| < 6$ muss demnach x auch durch 7 teilbar sein, was einen Widerspruch zur Annahme, dass x nicht durch 7 teilbar sein darf nach sich zieht.

- 5) Zerlege das gleichseitige Dreieck etwa wie dargestellt in vier gleichseitige Teildreiecke (mit der Seitenlänge 1). Diese vier Teile sind nun unsere Schubfächer.



Zusätzlich werde noch vorausgesetzt, dass bei dem in der Mitte liegenden Dreieck zusätzlich zu den inneren Punkten auch die Punkte auf den Dreiecksseiten mitzählen und dass bei den restlichen Dreiecken nur Punkte im Inneren, aber nicht am Rand liegen dürfen.

Nach dem Schubfachprinzip muss nun einer dieser 4 Teile mindestens zwei Punkte enthalten.

Da die drei Eckpunkte des Inneren Dreiecks auf Grund der Angabe nicht mitzählen, gilt für je zwei Punkte dieser gleichseitigen Dreiecke stets, dass ihr Abstand < 1 ist (Beachte dazu die eingezeichneten Kreisbögen mit dem Radius 1.)